

## 15 詭論一則

我們都知道：單位圓（半徑為 1 單位的圓）的周長恰為  $2\pi$ 。在此單位圓上取三點  $A, B, C$ ，如果三角形  $ABC$  是一個正三角形，則邊長

$$AB = BC = CA = \sqrt{3}.$$

一則有趣的機率問題是這樣問的：在單位圓上任意畫一條弦，則此弦的長度超過  $\sqrt{3}$  的機率是多大？底下給出幾種不同的解法版本，由讀者來判斷何者才是正確的。

【解法一】考慮此弦的中點。因為是單位圓的關係，所以弦中點與圓心的距離（弦心距）剛好介於 0 與 1 之間。當此弦的長度超過  $\sqrt{3}$  時，弦中點與圓心的距離（弦心距）必需小於  $\frac{1}{2}$ 。因此所求機率為

$$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

【解法二】與解法一類似，考慮此弦的中點。當弦中點落在半徑小於  $\frac{1}{2}$  的圓內時，此弦的長度才會超過  $\sqrt{3}$ 。因此所求機率為

$$\frac{\text{半徑 } \frac{1}{2} \text{ 的圓面積}}{\text{單位圓面積}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}.$$

【解法三】考慮此弦的長度。因為是單位圓的關係，所以此弦的長度剛好介於 0 與 2 之間。所以弦的長度超過  $\sqrt{3}$  的機率為

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【解法四】在單位圓上任意畫一弦  $AA'$ ，並在單位圓上取兩點  $B, C$ ，使得三角形  $ABC$  是一個正三角形。當  $A'$  落在弧  $AB$  上或弧  $AC$  上時，弦  $AA'$  的長度小於  $\sqrt{3}$ ；而當  $A'$  落在弧  $BC$  上時，弦  $AA'$  的長度大於  $\sqrt{3}$ 。因為弧  $AB$ 、弧  $BC$ 、弧  $AC$  剛好將單位圓三等分，所

以弦的長度超過 $\sqrt{3}$ 的機率為

$$\frac{1}{3}.$$

【解法五】設 $AA'$ 為所劃的弦。若將單位圓的圓心放在座標平面的原點，則可令 $A, A'$ 所對應的座標為

$$A = (\cos \theta_1, \sin \theta_1), A' = (\cos \theta_2, \sin \theta_2),$$

其中 $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi$ . 因此題目的樣本空間可以轉換為

$$\{(\theta_1, \theta_2) \mid 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 2\pi\}.$$

現在分兩種情形來考慮：

(1) 若 $0 \leq \theta_2 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ ，則弦 $AA'$ 的長度超過 $\sqrt{3}$ 的條件為

$$\frac{2\pi}{3} \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \frac{4\pi}{3}.$$

圖形為下圖中的第 ( I ) 區域。

(2) 若 $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ ，則弦 $AA'$ 的長度超過 $\sqrt{3}$ 的條件為

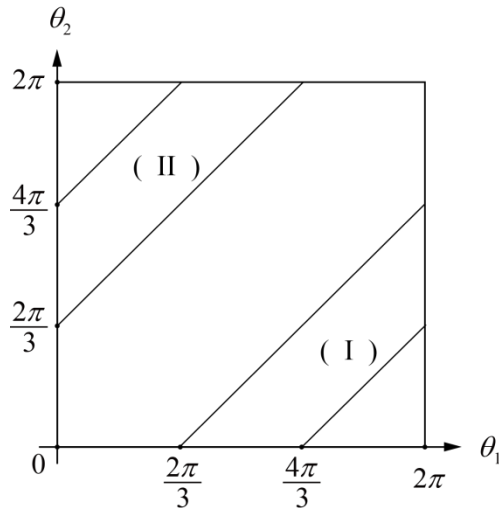
$$\frac{2\pi}{3} \leq \theta_2 - \theta_1 \leq \frac{4\pi}{3}.$$

圖形為下圖中的第 ( II ) 區域。

因為第 ( I )、( II ) 區的面積和剛好是樣本空間面積的三分之一，所以弦的長

度超過 $\sqrt{3}$ 的機率為

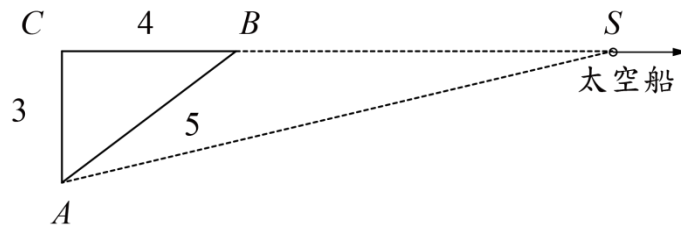
$$\frac{1}{3}.$$



習題 15.1 某綜藝節目有給獎活動，遊戲玩法是有三個房間，其中只有一個房間裡有大獎，另兩個房間沒獎，主持人知道獎放在哪一個房間。主持人先要抽獎觀眾選一個房間，沒被選上的兩個房間至少有一間沒獎，於是主持人打開一間沒獎的房間給觀眾看，接著再問觀眾要換選另一個房間或堅持原來選的不換。若純以機率來考慮，則換與不換哪一種策略較有利？

習題 15.2 下圖  $A, B, C$  三顆星球，相距分別為 5, 4, 3 光年， $S$  是一艘太空船向正東方航行。試問：在很久很久之後， $SA$  與  $SB$  的距離差為下列何者？

- (1) 0 光年。 (2) 3 光年。 (3) 4 光年。 (4)  $\infty$  光年。



習題 15.3 在龜兔賽跑中，神氣的兔子告訴烏龜說：我讓你一百公尺好了。就依此規定，兔子與烏龜比賽起來了。一隻在旁邊搖旗吶喊的小烏龜看了一會兒比賽之後，對著幫兔子加油的小兔子說：只要烏龜不停下來，不管兔子是否有停下來睡覺，我們都贏定了，因為當兔子跑了一百公尺時(即跑到烏龜的起跑點)，烏龜早已往前跑了一段距離，當兔子再次了這段距離時，烏龜又往前跑了另一

段距離，依此繼續下去，當然烏龜永遠在兔子的前面，所以烏龜是贏定了。  
當小兔子聽了這番分析之後，頓時陷入愁雲慘霧之中。你同意這隻烏龜的分析嗎？

習題 15.4 三個人去投宿，服務生說要 30 元。每個人就各出了 10 元，湊成 30 元。後來老板說今天特價，只要 25 元。於是叫服務生把退的 5 元拿去還給他們。服務生想自己暗藏 2 元起來，於是把剩下的 3 元還給他們。那三個人每人拿回 1 元， $10-1=9$  表示只出了 9 元住宿。 $9\times 3+$  服務生暗藏的 2 元 = 29 元。那剩下的 1 元呢？

### 動手玩數學

(不可思議的骰子)一粒標準的骰子是在均勻正方體的六面寫上 1, 2, 3, 4, 5, 6 六個正整數 (大部分都是塗上紅點來代表)。下表是同時擲兩粒標準的骰子所出現點數和之機率表。

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

小明與阿三分別在均勻骰子的六個面寫上六個正整數 (數字可以重複)。只知道它們都不是標準骰子，而且當同時丟擲此兩粒骰子時，點數和之機率表與上表完全一樣。你能猜到小明與阿三所寫上的六個數字分別是多少嗎？

### 挑戰題

在單位圓上任意畫一個三角形，恰為銳角三角形的機率是多少？

### 26之謎！

費馬發現 26 是唯一介於完全平方數與完全立方數間的正整數，即

$$5^2 < 26 < 3^3.$$

他並聲稱知道如何證明，然後向英國的渥里斯下挑戰書，而渥里斯一直未能證明出來，受到費馬無情的嘲笑！